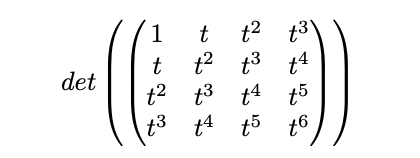
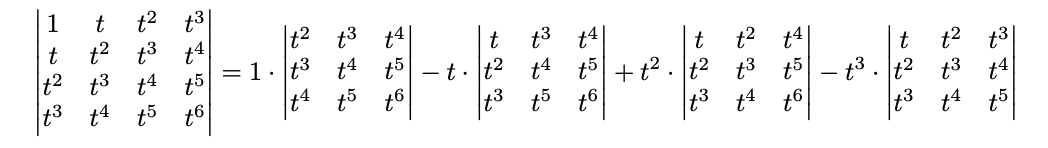
2 Евклидовы пространства функций

A)  
Задание: Дано пространство многочленов с вещественными коэффициентами, степени не выше третьей, определенных на отрезке [– 1; 1]. P3(t) = t3 + t2 + 1 Решение:

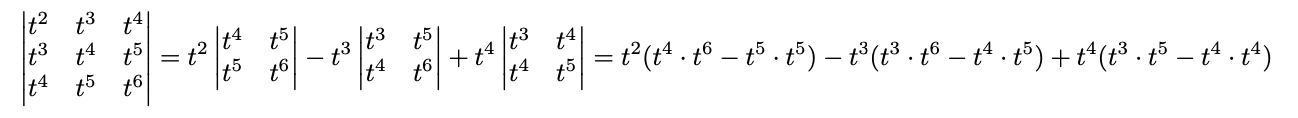
1)Проверим, что система векторов B = 1, t, t2 , t3 является базисом этого пространства. Составим матрицу Грама и посчитаем её определитель:

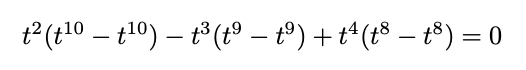


Для вычисления определителя матрицы, можно использовать различные методы, например, метод разложения по определённой строке или столбцу, метод Гаусса и т.д. В данном случае, определитель может быть вычислен с помощью разложения по первому столбцу:

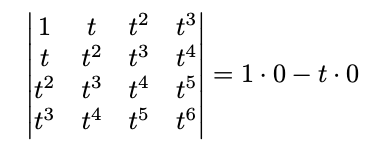


Рассчитаем каждый из этих миноров:

Упростим выражение:



Теперь, аналогично вычисляем остальные миноры:

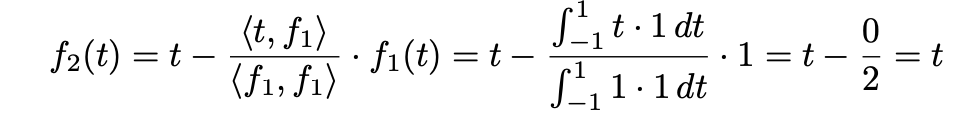


Если определитель матрицы Грама равен нулю, то это означает, что векторы образуют базис.

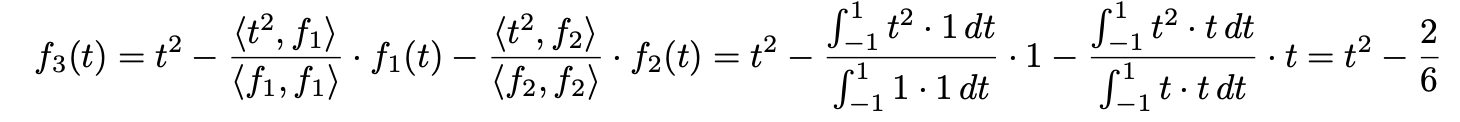
Для ортогонализации системы функций 1, t, t2, t3 на отрезке [−1, 1] методом Грама-Шмидта, мы последовательно вычислим ортогональные функции:

1: Первая ортогональная функция f1(t) остается равной исходной функции 1.

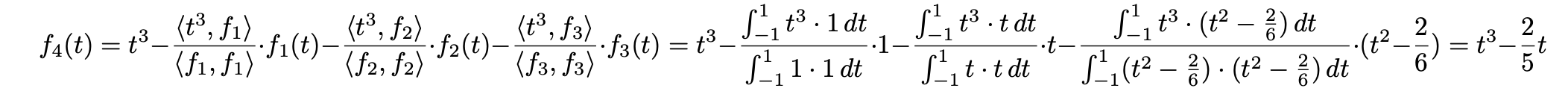
2: Вторая ортогональная функция f2(t) будет равна разности второй функции и проекции второй функции на первую функцию:



3: Третья ортогональная функция f3(t) будет равна разности третьей функции и проекции третьей функции на первую и вторую функции:



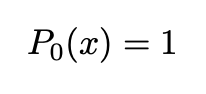
4: Четвертая ортогональная функция f4(t) будет равна разности четвертой функции и проекции четвертой функции на первую, вторую и третью функции:

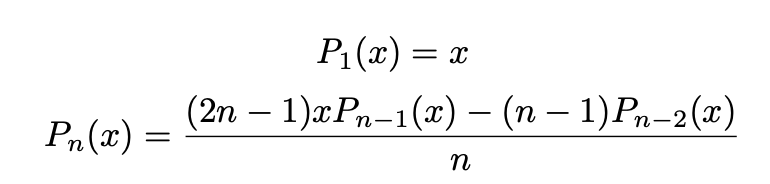


Таким образом, получаем ортогональную систему функций f1(t), f2(t), f3(t), f4(t) на отрезке [−1,1]

2) Выпишем первые четыре многочлена Лежандра:

Многочлены Лежандра Pn(x) ещё определяются рекурсивной формулой:





Таким образом, первые четыре многочлена Лежандра равны:

3) Чтобы найти координаты многочленов в заданном базисе, нужно разложить каждый многочлен по базисным функциям и выразить их коэффициенты. В данном случае из . Для многочлена :

Координаты многочлена в данном базисе равны

Для многочлена

Координаты многочлена в данном базисе равны

Для многочлена

Координаты многочлена в данном базисе равны

Для многочлена

Координаты многочлена в данном базисе равны

Таким образом, координаты многочленов в базисе соответственно равны

Для проверки ортогональности системы векторов в новом базисе, мы должны вычислить их скалярное произведение и убедиться, что они равны нулю.

Пусть систем векторов в новом базисе задана как соответственно, где

Вычислим скалярное произведение векторов:

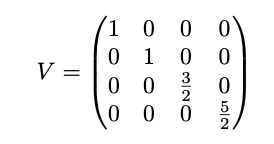
Все скалярные произведения равны нулю. Это означает, что система векторов {𝑣0, 𝑣1, 𝑣2, 𝑣3} ортогональна в новом базисе.

Таким образом, система многочленов является ортогональной.

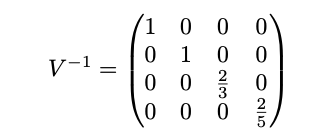
4) Для разложения многочлена по системе векторов {𝑣0, 𝑣1, 𝑣2, 𝑣3}, где

Мы можем представить систему векторов в виде матрицы V и вычислить коэффициент разложения, используя матричную алгебру.

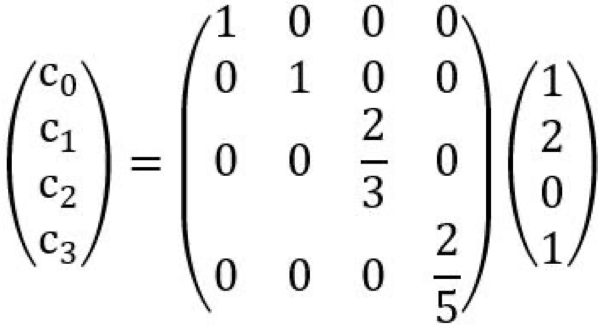
Сначала составим матрицу V из векторов системы:



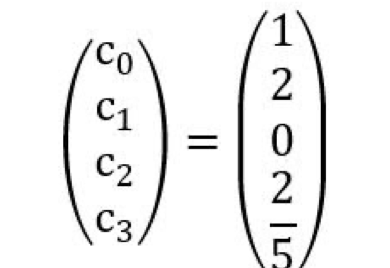
Затем вычислим обратную матрицу



Теперь коэффициент разложен путем умножения матрицы на вектор многочлена



Выполняя умножение матриц, получаем:



Таким образом, разложение многочлена по системе {𝑣0, 𝑣1, 𝑣2, 𝑣3} имеет вид:

или

Б)

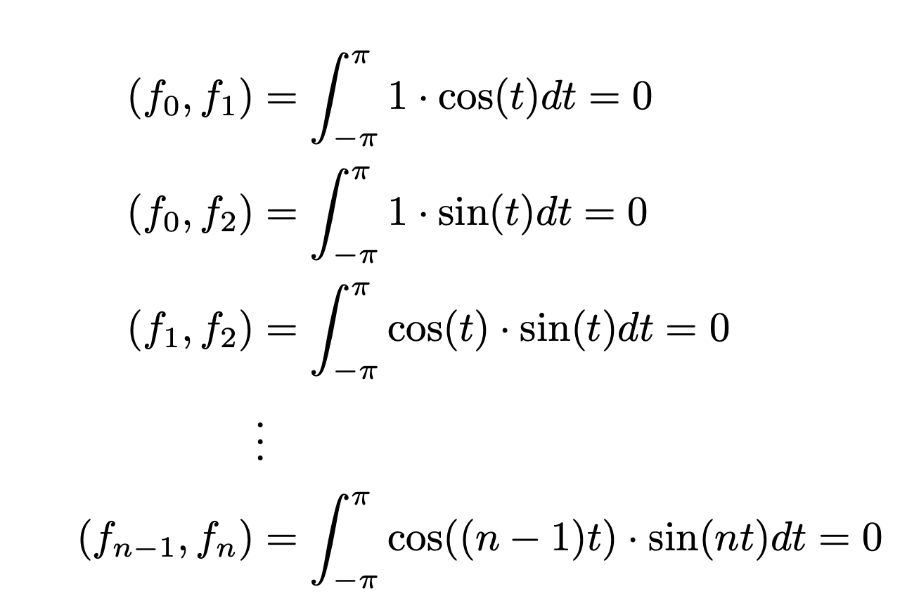
Задание: Дано пространство R функций, непрерывных (или имеющих конечный разрыв) на отрезке ￼ со скалярным произведением и длиной вектора Тригонометрические многочлены где вещественные коэффициенты, образуют подпространство P пространства R. Требуется найти многочлен в пространстве P, минимально отличающийся от функции ￼- вектора пространства R.

Решение:

1) Для начала проверим ортогональность системы функций в пространстве R с заданным скалярным произведением

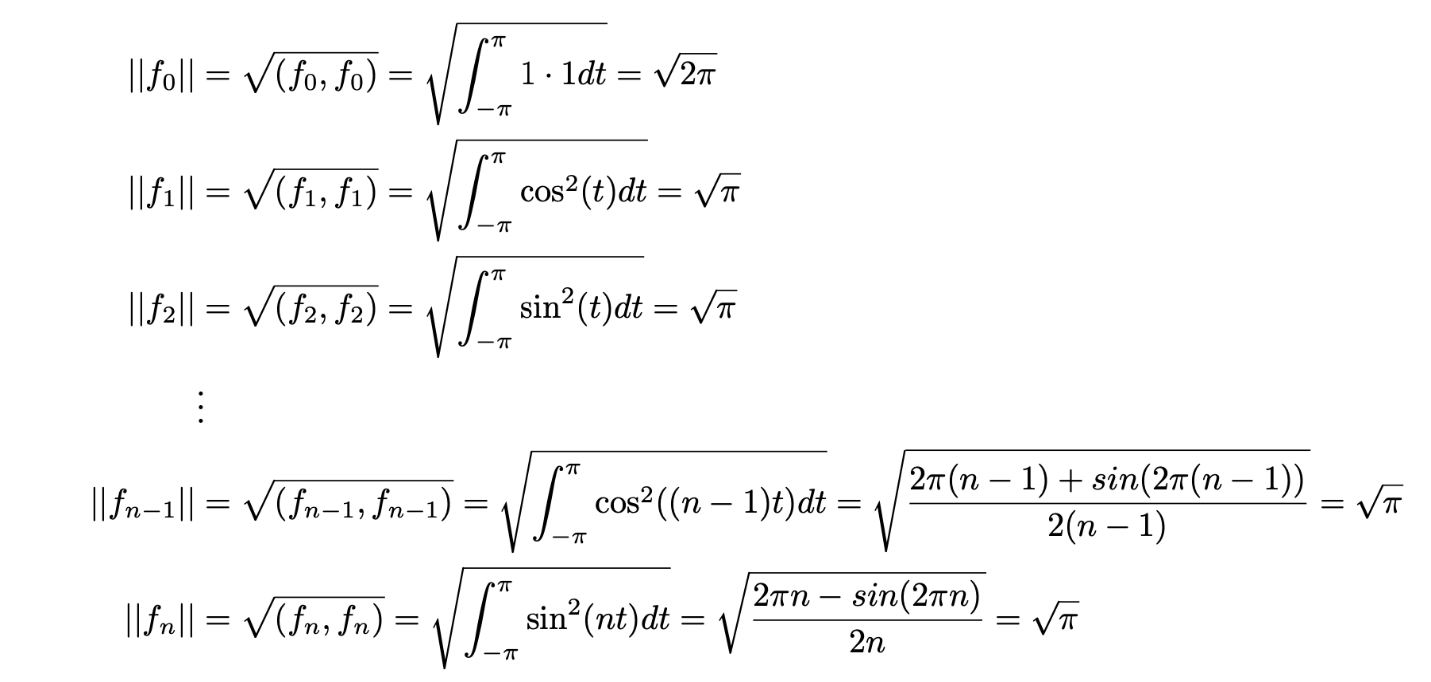
Рассмотрим произведение двух функций где соответствует i-й функции из системы, а ￼ оответствует j-й функции из системы:

Проверим ортогональность для всех пар функций. Если , то функции ортогональны.

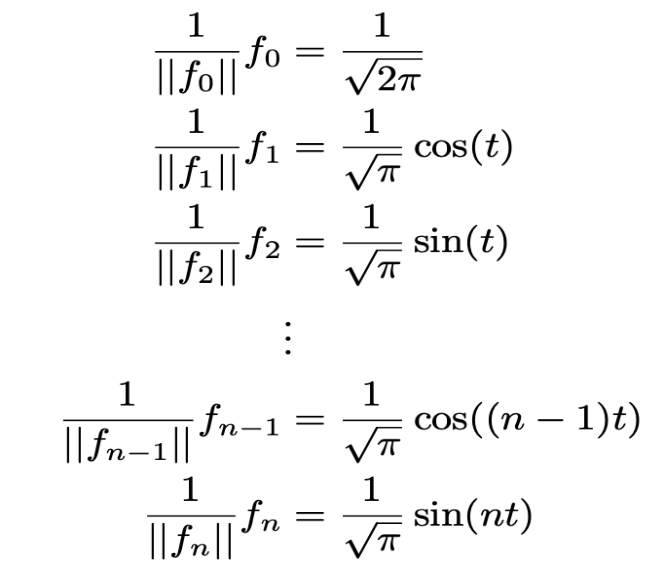


Таким образом, все пары функции из системы ортогональны.

Теперь нормируем систему функции. Для этого найдем длину каждой функции , определенную как



Теперь нормируем каждую функцию разделив ее на длину:



Таким образом, мы получили ортогональный и нормированный базис системы функции в пространстве R. Система функции является ортонормальным базисом подпространства P в пространстве R со скалярным произведением и нормой

2) Найдем проекции вектора на векторы полученного ортонормального базиса. При нормированных векторах базиса можно упростить вычисление проекций. Проекция вектора на каждый из нормированных векторов базиса будет равна скалярному произведению между и соответствующим вектором базиса, умноженному на базисный вектор.

Проекция вектора на вектор :

Выполним вычисления:

Проекция вектора на вектор :

Выполним вычисления:

Продолжим вычисление проекции вектора на вектор :

3) Запишем минимально отстоящий многочлен с найденными коэффициентами (тригонометрический многочлен Фурье для данной функции).

4) Изобразим графики f(t) и многочлена Фурье различных порядков n

5) При росте порядка многочлена Фурье мы приближаемся и исходной функции и при стремлении n к бесконечности многочлен совпадёт с функцией.